3〜4年セミナー

大山　陽介

～古典解析学・**Painlevé**方程式・特殊函数～

建設棟A220
電話・FAX：088-656-7541（内線：4781）
e-mail: ohyama@tokushima-u.ac.jp
研究室訪問:　9/24（火） 13:00〜14:00　 10/02（水） 12:00〜13:00

テキスト：ガンマ函数

James Bonnar, The Gamma Function, `viXra:1811.0330`

ガンマ函数: $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad (s > 0)$

ベータ函数: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \quad (p, q > 0)$

ベータ函数とガンマ函数: $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

ガンマ函数の基本性質

(1) $\Gamma(s)$ は $s > 0$ で収束して $\Gamma(s) > 0$ である

(2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(3) $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

(4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (5) $\Gamma'(1) = -\gamma$

オイラーの定数: $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0.5772\ldots$

ガウス積分: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$ **ウォリス積**: $\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots$

ワイエルシュトラスの無限積表示: $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}$

スターリングの公式: $\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z+1)}{\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z} = 1 \qquad (|\arg z| < \pi)$

倍角公式: $\Gamma(s)\,\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2s)$

Euler の反転公式: $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$

Hölder の定理: $F(x,\Gamma(x),\Gamma'(x),\Gamma''(x),\ldots,\Gamma^{(n)}(x)) \equiv 0$ が成り立つ有理函数 $F(x,t_0,t_1,\ldots,t_n)$ は存在しない。

Bohr-Mollerup の定理: (1) $f(1)=1$, (2) $f(x+1)=xf(x)$ $(x>0)$, (3) $\log f(x)$ は凸函数, を満たす函数 $f(x)$ はガンマ関数に限る。

必要な予備知識

・微積分　　　・線型代数　　　・集合と位相
・複素解析　　・常微分方程式

大山の研究：**Painlevé（パンルヴェ）方程式**（$\leftarrow$ 群論，代数幾何など）

第 1 方程式：　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 + t$

第 6 方程式：

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t}\right)\frac{dy}{dt}$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{y^2} + \gamma\frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right).$$

q-Painlevé VI: $(\overline{y}(t) = y(tq),\ \overline{z}(t) = z(tq))$

$$\frac{y\overline{y}}{a_3a_4} = \frac{(\overline{z} - b_1t)(\overline{z} - b_2t)}{(\overline{z} - b_3)(\overline{z} - b_4)},$$
$$\frac{z\overline{z}}{b_3b_4} = \frac{(y - a_1t)(y - a_2t)}{(y - a_3)(y - a_4)}.$$

[参考文献]

Bonnar, James
The Gamma Function, 2018.
`http://vixra.org/abs/1811.0330`

Godefroy, Maurice
La Fonction Gamma: Théorie, Histoire, Bibliographie, Gauthier-Villars, 1901.
`https://www.gutenberg.org/ebooks/29800`

Nielson, Niels
Handbuch der theorie der gammafunktion, Teubner, 1906.
`https://archive.org/details/handbuchgamma00nielrich/`

Artin, Emil
The Gamma Function, Holt, Rinehart & Winston, 1964.
`https://archive.org/details/THEGAMMAFUNCTION`

エミール・アルティン
ガンマ関数入門 (はじめよう数学), 日本評論社 (2002/10)
`https://www.nippyo.co.jp/shop/book/1985.html`

福原満州雄, ガンマー函数, 弘文堂, 1951.