パンルヴェ方程式と平坦座標

眞野 智行 (琉球大学)

第2回古典解析・徳島研究会 〜パンルヴェ首相百年記念〜
2018年1月20日

§1 大久保型方程式の多変数拡張と平坦座標.

$$T, B_\infty:\ n \times n \text{定数行列},$$
$$Y:\ n \text{成分ベクトル}$$

z を独立変数とし Y を未知関数とする常微分方程式

$$(zI_n + T)\frac{dY}{dz} = -B_\infty Y \tag{1}$$

はTが対角化可能のとき大久保型と呼ばれる.

Remark 1. 大久保型方程式はフックス型であり, T の固有値を $(z_1, \ldots, z_n)$ とすると $z = -z_1, \ldots, -z_n, \infty$ に確定特異点をもつ.

z と独立な変数 $x=(x_1,\dots,x_n)$ を導入して, 大久保型方程式 (1) を完全積分可能なパッフ系に拡張したい:

$$dY=\left(B^{(z)}dz+\sum_{i=1}^{n}B^{(i)}dx_i\right)Y, \tag{2}$$

ただし $B^{(z)}=-(zI_n+T)^{-1}B_\infty$ とおいた.

(2) に以下の仮定をおく:

(A1) $T=T(x)$ の成分は x に関して領域 $U\subset\mathbb{C}^n$ 上正則.

(A2) $B_\infty=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $\lambda_i-\lambda_j\notin\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

(A3) $H(z,x):=\det(zI_n+T)$ とおく. このとき $H(z,x)B^{(i)}(z,x)$ は z について多項式で, x について U 上正則.

(A4) $(z_1,\dots,z_n)$ を T の固有値とする. このとき H の判別式 $\prod_{i<j}(z_i-z_j)^2$ は U 上恒等的に 0 ではない. (この条件を「T は generic に正則半単純である」という.)

Lemma 1. $\lambda_i \neq 0\ (i = 1, \ldots, n)$ とする.
パッフ系(2)が完全積分可能である
$\iff\ \exists \tilde{B}^{(i)}\ (i = 1, \ldots, n) : x$ について U 上の正則関数を成分にもつ $n \times n$ 行列 *s.t.*

$$B^{(i)} = -(zI_n + T)^{-1} \tilde{B}^{(i)} B_\infty$$

かつ $T, B_\infty, \tilde{B}^{(i)}$ は次の関係式をみたす:

$$\begin{cases} [T, \tilde{B}^{(i)}] = [\tilde{B}^{(i)}, \tilde{B}^{(j)}] = O \quad (\forall i, j), \\ \dfrac{\partial \tilde{B}^{(i)}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \tilde{B}^{(j)}}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial T}{\partial x_i} = \tilde{B}^{(i)} + [\tilde{B}^{(i)}, B_\infty], \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3}$$

特に $T, \tilde{B}^{(i)}$ は同時対角可能で

$$T \sim \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_n), \quad \tilde{B}^{(i)} \sim \mathrm{diag}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

Remark 2. パッフ系 (2) は大久保型方程式 (1) の普遍積分可能変形を与える, すなわち (1) が与えられると, (2) が x の変数変換の自由度を除いて一意的に決まる. また (2) は (1) のモノドロミ保存変形を与える.

Remark 3. $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty$ が関係式 (3) をみたすとすると, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty - \lambda I_n$ も (3) をみたす. 対応して (2) の解 Y は Euler 変換 (Riemann-Liouville 積分) によって

$$Y^{(\lambda)}(z) := \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int (u-z)^{\lambda-1} Y(u) du$$

と変換される. (パッフ系 (2) は "複素数階微分の作用で閉じている".)

- 以下では, $\tilde{B}^{(n)} = I_n$ を仮定する (一般性を失わない).

Question:　パッフ系 (2) は $\underline{x\text{の変数変換の自由度を除いて}}$ (1) から一意的に定まるのであった. では (1) の変形のパラメータ空間 U に自然な座標の取り方は存在するか? (つまり変数 x の自然な取り方は存在するか?)

Answer:　次の 2 種類の特別な座標が存在する.

(I) “標準座標”

$$z = (z_1, \ldots, z_n) : \ T\text{の固有値(あるいは(1)の確定特異点の位置)}$$

Remark 4. パッフ系(2)は標準座標に関して自然な斉次性の構造をもつことに注意する. すなわち(2)の解ベクトルYについて

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n\frac{\partial}{\partial z_n} \right) Y = -B_\infty Y$$

が成り立つ. これはYの第i成分y_iが変数$(z, z_1, \ldots, z_n)$に関して重み$-\lambda_i$の“斉次関数”であることを意味する.

(II) “平坦座標” $t = (t_1, \ldots, t_n)$

行列 T の n 行目からなる行ベクトル $(T_{n1}, \ldots, T_{nn})$ について

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T_{n1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_{nn}}{\partial x_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial T_{n1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial T_{nn}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

が成り立つとすると, 変数変換

$$x \mapsto t_i := (\lambda_i - \lambda_n + 1)^{-1} T_{ni}$$

を行うことができる.

平坦座標の性質

- $E = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n\frac{\partial}{\partial z_n} = w_1 t_1\frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + w_n t_n\frac{\partial}{\partial t_n}$, ただし $w_i := \lambda_i - \lambda_n + 1$.

すなわち平坦座標 t は標準座標と同じ重み構造を定める.

- $D := \{\det T(t) = 0\} \subset U$ は斎藤自由因子となり, T はその斎藤行列を与える.

すなわち
$$\begin{pmatrix} V_n \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} := T \begin{pmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_n} \end{pmatrix}$$
は D に沿った対数ベクトル場の自由基底を与える.

- $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ の各成分は y_n の微分を用いて書ける:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = -B_\infty^{-1} \begin{pmatrix} V_n y_n \\ \vdots \\ V_1 y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{t_1}\partial_{t_n}^{-1} y_n \\ \vdots \\ \partial_{t_n}\partial_{t_n}^{-1} y_n \end{pmatrix}, \quad (y_n \text{ の “原始性”}).$$

• t の正則関数を成分にもつ n ベクトル $\vec{g} = \big(g_1(t), \ldots, g_n(t)\big)$ で次を満たすものが存在する:

$$Eg_i = (1 + w_i)g_i,$$
$$T = EC, \quad \tilde{B}^{(i)} = \frac{\partial C}{\partial t_i},$$

ただし $C := \left(\dfrac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)$. $\vec{g}$ をポテンシャルベクトル場と呼ぶ.

J をその (i, j) 成分が $J_{ij} := \delta_{i,n+1-j}$ で定義される $n \times n$ 行列とし, $C^* := J\,{}^t CJ$ とおく. このとき

$$C^* = C \iff \exists\, F = F(t) \text{ s.t. } \left(\frac{\partial F}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial t_n}\right) = \vec{g}J$$

この条件が成り立つとき F をプレポテンシャルと呼ぶ.

平坦座標の幾何学的意味 (あるいは平坦座標を規定する幾何構造の coordinate free な記述) は次で与えられる:

Theorem 1. 条件 *(5)* の下で, パッフ系 *(2)* は U 上の *Saito structure (without metric)* を定める.

特に, $C^* = C$ が成り立つとき, *(2)* は *Frobenius* 多様体の構造を定める.

Saito structure (without metric) (C. Sabbah)

$$X : n\text{次元複素多様体}$$
$$TX : X\text{の接ベクトル束}$$

X 上の Saito structure (without metric) とは, (i)(ii)(iii) で与えられる 4 つ組 (∇, Φ, E, e) である積分可能条件をみたすものである:

(i) ∇ : TX 上の平坦かつ捩じれのない接続

(ii) Φ : TX 上の対称 Higgs 場 (X 上の $End(TX)$ 係数 1-形式)

(iii) E, e : TX の大域切断 (X 上のベクトル場),
E を Euler 場, e を unit 場と呼ぶ.

定理 1の証明. 完全積分可能パッフ系(2)が与えられたとする.

$$\mathbb{C}^n(U) : U \text{ 上の } n \text{ 階の自明束}$$
$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) : \mathbb{C}^n(U) \text{ の } U \text{ 上の枠}$$

(2)の係数行列$T, \tilde{B}^{(i)}$を用いて, $\mathbb{C}^n(U)$の自己準同型$\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(n)}$を次のように定義する:

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{e}_i) := \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\mathbf{e}_j, \quad \Phi^{(k)}(\mathbf{e}_i) := \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ij}^{(k)}\mathbf{e}_j, \quad (k = 1, \ldots, n).$$

条件(5)の下で, TUから$\mathbb{C}^n(U)$への同型$\varphi : TU \to \mathbb{C}^n(U)$を次で定めることができる:

$$\varphi(\partial_{x_k}) := \Phi^{(k)}(\mathbf{e}_n), \quad (k = 1, \ldots, n).$$

$$E := \varphi^{-1}(\Phi^{(0)}(\mathbf{e}_n)), \quad e := \varphi^{-1}(\mathbf{e}_n),$$
$$\Phi := \sum_{k=1}^{n} dx_k\, \varphi^{-1} \circ \Phi^{(k)} \circ \varphi, \quad \triangledown := \varphi^{-1} \circ \triangledown^{(0)} \circ \varphi,$$

ただし $\triangledown^{(0)}$ は次で定まる $\mathbb{C}^n(U)$ 上の接続:

$$\triangledown^{(0)}(\mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

とすると, 4 つ組 $(\triangledown, \Phi, E, e)$ は U 上の Saito structure の条件をみたす. $\square$

Remark 5. Saito structure に付随する Higgs 場 Φ を用いて, TU 上に可換かつ結合的な積 $\circ$ を次のように定めることができる:

$$\xi \circ \eta := \Phi_\xi(\eta), \quad \xi, \eta \in TU.$$

標準座標 $(z_1, \ldots, z_n)$ を用いて, 積 $\circ$ を表示すると

$$\partial_{z_i} \circ \partial_{z_j} = \delta_{ij} \partial_{z_j}$$

となる. すなわち $\mathbb{C}$-代数としての TU は 1 次元単純代数の直積 A_1^n に分解する (半単純性).

一方, 平坦座標 $(t_1, \ldots, t_n)$ は

$$\nabla(\partial_{t_i}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

で特徴づけられる.

ポテンシャルベクトル場の特徴付け

$\vec{g}=(g_1(t),\ldots,g_n(t))$ が U 上のある Saito structure に付随するポテンシャルベクトル場を与える.

$\iff$ $\vec{g}$ が次の非線形微分方程式の解である:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2 g_m}{\partial t_k \partial t_i}\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_l \partial t_m}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2 g_m}{\partial t_l \partial t_i}\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_m}, \quad i,j,k,l=1,\ldots,n, \\ \displaystyle\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_n \partial t_i}=\delta_{ij}, \quad i,j=1,\ldots,n, \\ Eg_j=(1+w_j)g_j, \quad j=1,\ldots,n. \end{cases}$$

これを拡張 WDVV 方程式と呼ぶ.

プレポテンシャル F が存在する場合は, F は WDVV 方程式を満たすことがよく知られている.

§2 プレポテンシャルと τ 関数の **caustic** の周りでの解析的表示.

$n=3$ のとき, 大久保型方程式のモノドロミ保存変形は第 6 パンルヴェ方程式に帰着する. 簡単のためにプレポテンシャル F を持つ場合を考える. F を特徴づける方程式系は

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_k \partial t_i \partial t_m}\frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_j \partial t_{4-m}} = \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_i \partial t_m}\frac{\partial^3 F}{\partial t_k \partial t_j \partial t_{4-m}}, \quad i,j,k,l=1,2,3, \\ \displaystyle\frac{\partial^3 F}{\partial t_3 \partial t_i \partial t_j} = \delta_{i,4-j}, \qquad i,j=1,2,3, \\ EF=(1+2r)F, \quad \text{ただし } 2r=w_1+w_3=2w_2. \end{cases}$$

プレポテンシャルの例(Dubrovin-Mazzocco の代数解)

$$(H_3) \qquad F = \frac{t_2^2 t_3 + t_1 t_3^2}{2} + \frac{t_1^{11}}{3960} + \frac{t_1^5 t_2^2}{20} + \frac{t_1^2 t_2^3}{6},$$

$w_1 = 1/5, w_2 = 3/5, w_3 = 1.$

$$(H_3)' \qquad F = \frac{t_2^2 t_3 + t_1 t_3^2}{2} - \frac{t_1^4 z}{18} - \frac{7 t_1^3 z^4}{72} - \frac{17 t_1^2 z^7}{105} - \frac{2 t_1 z^{10}}{9} - \frac{64 z^{13}}{585},$$

ただし z は $t_2 + t_1 z + z^4 = 0$ の解, $w_1 = 3/5, w_2 = 4/5, w_3 = 1.$

$$(H_3)'' \qquad F = \frac{t_2^2 t_3 + t_1 t_3^2}{2} + \frac{4063 t_1^7}{1701} + \frac{19 t_1^5 z^2}{135} - \frac{73 t_1^3 z^4}{27} + \frac{11 t_1 z^6}{9} - \frac{16 z^7}{35},$$

ただし z は $-t_1^2 + t_2 + z^2$ の解, $w_1 = 1/3, w_2 = 2/3, w_3 = 1.$

$$H(z,t) = \det(zI_3 + T) = \prod_{i=1}^{3}(z + z_i)$$

に対して

$$\mathcal{K}(t) := \prod_{i<j}(z_i - z_j)^2$$

とおく. $\mathcal{K}(t)$ を caustic と呼ぶ.

Observation

上の3種のプレポテンシャルに関して caustics は次のように分解される:

$$(H_3) \qquad \mathcal{K} = \frac{1}{15625} t_2^2 (5t_1^3 + 27t_2)^3 (t_1^3 - t_2)^5$$

$$(H_3)' \qquad \mathcal{K} = -\frac{1}{46875} (z^3 + t_1)^2 (4z^3 + 9t_1)^3 (4z^3 + t_1)^5$$

$$(H_3)'' \qquad \mathcal{K} = -\frac{1638400}{531441} z^5 (z + t_1)^2 (8t_1^2 - 9t_1 z + 3z^2)^3 (5t_1 + z)^5$$

caustics の各因子は, ある $c \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{Q}$ に対して $(t_2 - c\, t_1^{w_2/w_1})^\lambda$ によって Puiseux 展開される.

以下では, generic な超越的プレポテンシャルを扱う.

F の斉次性を用いると, 1 変数関数 $f = f(x)$ によって F は

$$F(t) = \frac{t_2^2 t_3 + t_1 t_3^2}{2} + t_1^{\frac{2r+1}{w_1}} f(t_2\, t_1^{-w_2/w_1})$$

と表せる. このとき WDVV 方程式は f について次のただ 1 つの 3 階非線形微分方程式に帰着される:

$$R(x, f, f', f'')f''' = S(x, f, f', f'') \tag{6}$$

ここで R, S は x, f, f', f'' の多項式である.

微分方程式 (6) には次の自由度がある:
$f(x)$ を (6) の解としたとき, 任意の $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $c^{-4} f(cx)$ も (6) の解になる.

そこで $x = 1$ のまわりで "初期条件" $R = S = 0$ をみたす解を考える.
($R = S = 0 \Longrightarrow \mathcal{K} = 0$ なので caustic の周りの解を考えることになる.)

Theorem 2. $X := x - 1$とする．*2*変数の収束ベキ級数

$$\phi(X, Z) = c_{0,0} + c_{0,1}X + c_{0,2}X^2 + X^3 \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{i,j+3} Z^i X^j$$

が存在して $f(x) = \phi(X, X^\lambda)$ は微分方程式 *(6)* をみたす．よって $\phi(X, X^\lambda)$ は *(6)* の *2*-パラメータ解を与える．*(*λ と $c_{1,3}$ が任意定数である.*)*

このとき対応して, *caustic* は

$$\mathcal{K} = X^{\lambda+2}(X \text{ と } X^\lambda \text{ の収束ベキ級数})$$

という表示をもつ.

モノドロミ保存変形の τ 関数

定理 2 で得られたプレポテンシャルに対応する大久保型方程式のモノドロミ保存変形を考える:

$$\frac{dY}{dz} = -(zI_3 + T)^{-1} B_\infty Y = \sum_{i=1}^{3} \frac{B_i}{z + z_i} Y. \tag{7}$$

これに対する神保-三輪-上野の τ 関数は次で定義される:

$$d \log \tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j \neq i} \frac{\mathrm{tr} B_i B_j}{z_i - z_j} (dz_i - dz_j). \tag{8}$$

Euler 作用素 E に対して

$$
\begin{aligned}
E^n &:= \underbrace{E \circ \cdots \circ E}_{n} \left(= z_1^n \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2^n \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3^n \frac{\partial}{\partial z_3} \right), \\
E^0 &:= e = \frac{\partial}{\partial t_3} \left(= \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} \right)
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
E^0 \log \tau &= 0, \\
E \log \tau &= (r-1)^2, \\
E^2 \log \tau &= \operatorname{tr} T(B_\infty^2 - r^2 I_3)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

$E^n \log \tau$ $(n \geq 3)$ については z_i $(i = 1, 2, 3)$ が 3 次式 $\det(T - z_i I_3)$ をみたすことを用いて帰納的に計算できる.

この公式を用いて τ 関数が平坦座標を用いて表示できる:

Theorem 3. 定理 2 で得られたプレポテンシャルに対応するモノドロミ保存変形の τ 関数は

$$\tau = \mathcal{K}^{\frac{\lambda^2}{8(\lambda+2)^2}}(X \text{ と } X^{\lambda} \text{ の収束ベキ級数})$$

と表示できる.

caustic の周りでの代数の構造

定理 2のプレポテンシャルの収束領域UでのTU上の代数構造を記述する.

標準座標は

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= X^{\frac{\lambda+2}{2}}(X \text{と} X^\lambda \text{の収束ベキ級数}) \\ z_3 &= (X \text{と} X^\lambda \text{の収束ベキ級数}) \end{aligned}$$

と表示される. 変数変換

$$u_1 := \frac{z_1 + z_2}{2},\ u_2^{\frac{\lambda+2}{2}} := \frac{\lambda+2}{2}(z_1 - z_2),\ u_3 := z_3$$

を行うと, 積$\circ$は

$$\begin{aligned} &\partial_{u_1} \circ \partial_{u_2} = \partial_{u_2}, \quad \partial_{u_2} \circ \partial_{u_2} = u_2^\lambda \partial_{u_1}, \\ &\partial_{u_i} \circ \partial_{u_j} = \delta_{ij} u_j, \quad (i,j) \neq (1,2),(2,1),(2,2) \end{aligned}$$

と表示される. この代数は $I_2(\lambda+2)A_1$ と直積に分解する. ここでA_1は 1次元単純$\mathbb{C}$代数を表し, $I_2(\lambda+2)$ は $\lambda+2 \in \mathbb{N}$のときには Coxeter群$I_2(\lambda+2)$の Frobenius manifoldの代数構造に一致する.