

超幾何微分方程式の Voros 係数の 位相的漸化式による表示

竹井優美子 (Yumiko TAKEI)

神戸大理・D1

徳島古典解析研究会
2018年1月19日

- 1 概要
- 2 完全 WKB 解析と Voros 係数
- 3 位相的漸化式
- 4 WKB 解の位相的漸化式による表示
- 5 Voros 係数の位相的漸化式による表示

- 1 概要
- 2 完全 WKB 解析と Voros 係数
- 3 位相的漸化式
- 4 WKB 解の位相的漸化式による表示
- 5 Voros 係数の位相的漸化式による表示

概要

$$y^2 - \left(\frac{x^2}{4} - E \right) = 0 \xrightarrow{\text{位相的漸化式} \quad ([EO1], [CEO])} \{W_{g,n}\}_{g \geq 0, n \geq 1}$$

量子化 ([EO1],
[DM], [BE])



$$\left[\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left\{ \frac{x^2}{4} - E - \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \hbar \right\} \right] \psi(x, \hbar) = 0$$

$W_{g,n}$ を用いて解の性質
を記述できないか?

概要

$$y^2 - \left(\frac{x^2}{4} - E \right) = 0 \xrightarrow{\substack{\text{位相的漸化式} \\ ([EO1], [CEO])}} \{W_{g,n}\}_{g \geq 0, n \geq 1}$$

量子化 ([EO1],
[DM], [BE])



$$\left[\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left\{ \frac{x^2}{4} - E - \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \hbar \right\} \right] \psi(x, \hbar) = 0$$

$W_{g,n}$ を用いて解の性質
を記述できないか?

本講演の目的

(合流型) 超幾何微分方程式に対して, 完全 WKB 解析で重要な役割を演じる Voros 係数が, 位相的漸化式により定義される自由エネルギーの母関数を用いて書き表されることを示すこと.

- 1 概要
- 2 完全 WKB 解析と Voros 係数
- 3 位相的漸化式
- 4 WKB 解の位相的漸化式による表示
- 5 Voros 係数の位相的漸化式による表示

完全 WKB 解析

Schrödinger 方程式

$$\left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi = 0$$

の WKB 解

$$\psi_{\pm}(x, \hbar) = \exp \left(\int^x S^{(\pm)}(x, \hbar) dx \right)$$

(ただし, $S = \sum_{j \geq -1} \hbar^j S_j(x)$ は $S^2 + \frac{dS}{dx} = \hbar^{-2} Q$ の形式解) に Borel 総和法を用いて解析的な意味づけを行うのが完全 WKB 解析である. そこでは, 接続公式を記述する際などに, Voros 係数

$$V'' = \int_{\gamma} S(x, \hbar) dx.$$

が重要な役割を果たす. ここで, γ は特異点から特異点への積分路である. (Weber 方程式, Kummer 方程式, Gauss の超幾何微分方程式等に対しては Voros 係数の具体形が知られている.)

例 (Weber 方程式の Voros 係数の積分路)

Weber 方程式 :
$$\left(-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4} - E \right) \psi = 0$$

Stokes 曲線 :
$$\Im \int_a^x \sqrt{x^2 - 4E} dx = 0 \quad (a = \pm 2\sqrt{E})$$

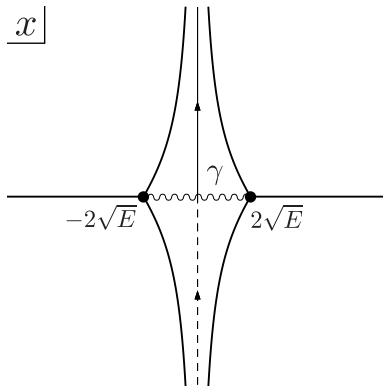


Figure: Weber 方程式の Voros 係数の積分路

- 1 概要
- 2 完全 WKB 解析と Voros 係数
- 3 位相的漸化式
- 4 WKB 解の位相的漸化式による表示
- 5 Voros 係数の位相的漸化式による表示

スペクトル曲線

代数曲線

$$P(x, y) = p_0(x)y^r + p_1(x)y^{r-1} + \cdots + p_{r-1}(x)y + p_r(x) = 0$$

を考え,

- $P(x(z), y(z)) = 0$;
- 任意の z に対して

$$dx(z) \neq 0 \quad \text{or} \quad dy(z) \neq 0$$

を満たす Σ 上の有理型関数 $x(z), y(z)$ をとる. ここで, Σ は種数 \hat{g} の閉 Riemann 面とする.

スペクトル曲線

このとき, (Σ, x, y) をスペクトル曲線と呼ぶ.

以下では, $\hat{g} = 0$ (i.e. $\Sigma = \mathbb{P}^1$) とする.

位相的漸化式 [Eynard-Orantin 07]

スペクトル曲線 (Σ, x, y) が与えられたときに, $g \geq 0, n \geq 1$ に対して, Σ^n 上の有理型微分 $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ を次で定める.

$$W_{0,1}(z) = y(z) \frac{dx}{dz}(z) dz, \quad W_{0,2}(z_1, z_2) = B(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} \quad (\text{Bergmann 核}),$$

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \text{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0 - z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1 + g_2 = g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$

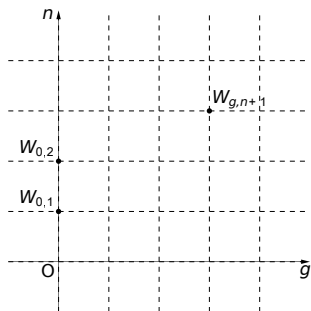
$$((g, n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \text{ s.t. } 2g - 2 + n \geq 0).$$

- 分岐点は $dx(z)$ の零点である. ここでは 1 位の零点とする.
- \bar{z} は分岐点の近傍における z の共役点 ($x(\bar{z}) = x(z)$) である.
- $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ のとき $z_I = (z_{i_1}, \dots, z_{i_r})$.

位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

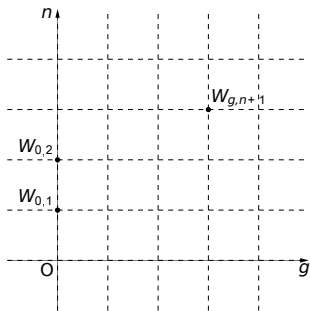
$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

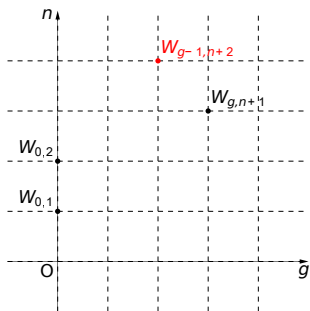
$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \left(\frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)} \right) \\ \times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

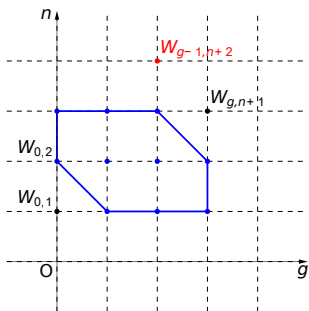
$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

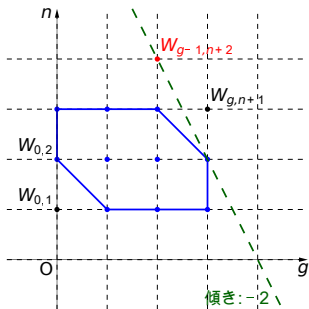
$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

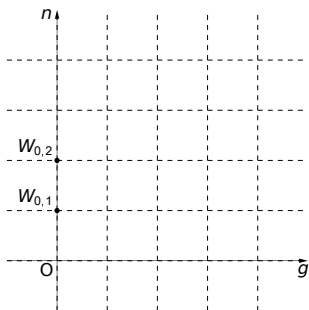
$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

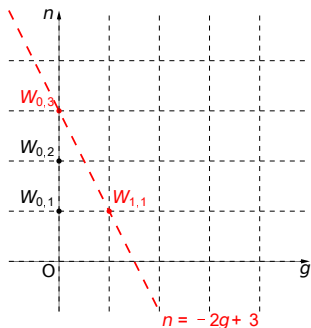
$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

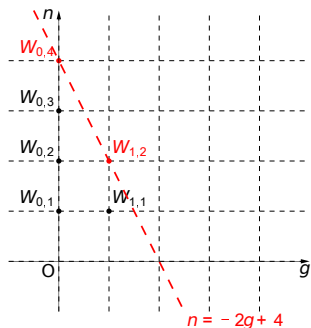
$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

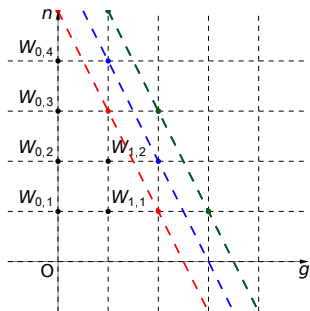
$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)}$$

$$\times \left\{ W_{g-1, n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, 2, \dots, n\}}} W_{g_1, 1+|I|}(z, z_I) W_{g_2, 1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\}$$



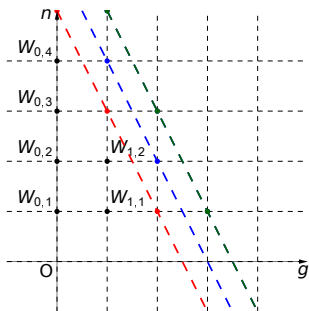
位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)} \times \left\{ W_{g-1,n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1,2,\dots,n\}}} W_{g_1,1+|I|}(z, z_I) W_{g_2,1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\} \quad (1)$$



位相の漸化式 [Eynard-Orantin 07]

$$W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)} \times \left\{ W_{g-1,n+2}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1,2,\dots,n\}}} W_{g_1,1+|I|}(z, z_I) W_{g_2,1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right\} \quad (1)$$



注意

(1) は $(2g - 2 + n)$ についての漸化式である。

自由エネルギー

位相的漸化式から求められる $W_{g,1}$ を用いて自由エネルギー

$$F_0 = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \text{ は} \\ ydx \text{ の極}}} \operatorname{Res}_{z=\alpha} V_\alpha(z) y(z) dx(z) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha \text{ は} \\ ydx \text{ の極}}} t_\alpha \mu_\alpha,$$

$$F_1 = -\frac{1}{2} \log(\tau_B(\{x(a)\})) - \frac{1}{24} \log \left(\prod_{a \text{ は分岐点}} y'(a) \right),$$

$$F_g = \frac{1}{2-2g} \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \Phi(z) W_{g,1}(z) \quad (g \geq 2)$$

が定義される ([EO1]). ただし,

- t_α は $y(z) dx(z)$ の $z = \alpha$ における留数である;
- τ_B は Kokotov - Korotkhon の Bergman τ 関数である;
- $\Phi(z)$ は $\frac{d\Phi}{dz} = y(z) dx(z)$ を満たす関数である.

例 (Weber 曲線)

次の代数曲線を考える.

$$P(x, y) = y^2 - \left(\frac{x^2}{4} - E \right) = 0. \quad (2)$$

このとき, スペクトル曲線 (Σ, x, y) として $\Sigma = \mathbb{P}^1$,

$$\begin{cases} x = x(z) = \sqrt{E} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ y = y(z) = \frac{\sqrt{E}}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \end{cases} \quad (3)$$

をとる. すると

$$dx(z) = \sqrt{E} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) dz = \frac{\sqrt{E}(z+1)(z-1)}{z^2} dz$$

より, 分岐点は $z = \pm 1$ であり, $\bar{z} = 1/z$ である.

例 (Weber 曲線)

(2) の場合には, $W_{1,1}$ と $W_{0,3}$ は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned} W_{1,1}(z) &= \sum_{a=\pm 1} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)} W_{0,2}(z, \bar{z}) \\ &= \frac{1}{32E} \left\{ \frac{z^2 - 4z + 1}{(z-1)^4} - \frac{z^2 + 4z + 1}{(z+1)^4} \right\} dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{0,3}(z_0, z_1, z_2) &= \sum_{a=\pm 1} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)} \{ W_{0,2}(z, z_1) W_{0,2}(\bar{z}, z_2) + W_{0,2}(z, z_2) W_{0,2}(\bar{z}, z_1) \} \\ &= \frac{1}{2E} \left\{ \frac{1}{(z_0+1)^2(z_1+1)^2(z_2+1)^2} - \frac{1}{(z_0-1)^2(z_1-1)^2(z_2-1)^2} \right\} dz_0 dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

さらに, 自由エネルギーは以下のようになる:

$$\begin{aligned} F_0(E) &= -\frac{3}{4} E^2 + \frac{1}{2} E^2 \log E, & F_1(E) &= -\frac{1}{12} \log E, \\ F_g(E) &= \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} E^{2-2g} \quad (g \geq 2). \end{aligned}$$

- 1 概要
- 2 完全 WKB 解析と Voros 係数
- 3 位相的漸化式
- 4 WKB 解の位相的漸化式による表示
- 5 Voros 係数の位相的漸化式による表示

定理 1

$P(x, y) = p_0(x)y^2 + p_2(x) = 0$ に対して,

$$\psi(x, \hbar) = \exp \left[\hbar^{-1} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2!} \int_D \int_D \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 z_2 - 1)^2} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \left\{ \sum_{\substack{2g+n-2=m \\ g \geq 0, n \geq 1}} \frac{1}{n!} \int_D \cdots \int_D W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right\} \right] \Big|_{z=z(x)} \quad (4)$$

と定義する。ここで $z = z(x)$ は $x = x(z)$ の逆関数であり,

$$\int_D = \sum_i \left(\nu_{\beta_i} \int_{\beta_i}^z \right) + \sum_j \left(\nu_{\gamma_j} \int_{\gamma_j}^z \right)$$

である。また、 β_i は $x(z)$ の 1 位の極、 γ_j は $p_0(x(z))$ の零点であり、 ν_{β_i} と ν_{γ_j} は次を満たすパラメータとする。

$$\sum_i \nu_{\beta_i} + \sum_j \nu_{\gamma_j} = 1.$$

定理 1

このとき, $\psi(x, \hbar)$ は

$$\left[\hbar^2 p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + \hbar^2 Q(x) \frac{d}{dx} + \{p_2(x) + \hbar R(x)\} \right] \psi(x, \hbar) = 0 \quad (5)$$

の WKB 解である. ここで,

$$Q(x) = \frac{1}{2} \frac{dp_0(x)}{dx} - \sum_j \frac{\nu_{\gamma_j} p_0(x)}{x - x(\gamma_j)}$$

$$R(x) = \left[\frac{y(z)p_0(x(z))}{\frac{dx}{dz}(z)} \left\{ \sum_i \left\{ \nu_{\beta_i} \left(\frac{1}{z - \beta_i} - \frac{1}{z - \bar{\beta}_i} \right) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_j \left\{ \nu_{\gamma_j} \left(\frac{1}{z - \gamma_j} - \frac{1}{z - \bar{\gamma}_j} \right) \right\} \right\} \right] \Big|_{z=z(x)}$$

である. (β_i は $x(z)$ の 1 位の極, γ_j は $p_0(x(z))$ の零点である.)

注. 定理 1 はスペクトル曲線が admissible な場合には [BE] の結果に含まれる.

定理 1 の証明

$$\begin{aligned}
 T(z, \hbar)dz &= [S(x, \hbar)dx] \Big|_{z=z(x)} = \left[\left\{ \frac{d}{dx}(\log \psi) \right\} dx \right] \Big|_{z=z(x)} \quad (6) \\
 &= \hbar^{-1} T_{-1}(z)dz + T_0(z)dz + \hbar T_1(z)dz + \dots
 \end{aligned}$$

が Riccati 方程式の解であることを示す。ここでは、 $T_1(z)$ が次を満たすことのみ示す。

$$2T_{-1}(z)T_1(z) + T_0(z)^2 + T_0(z)' + \left(x' \frac{Q(x(z))}{p_0(x(z))} - \frac{x''}{x'} \right) T_0(z) = 0. \quad (7)$$

ここで ' は z に関する微分を表している。(6) より、次がわかる。

$$\begin{aligned}
 T_1(z) &= \frac{d}{dz} \int_D W_{1,1}(z_0) + \frac{1}{3!} \frac{d}{dz} \int_D \int_D \int_D W_{0,3}(z_0, z_1, z_2) \\
 &= W_{1,1}(z) + \frac{1}{2} \int_D \int_D W_{0,3}(z, z_1, z_2).
 \end{aligned}$$

定理 1 の証明

$W_{1,1}(z_0)$ を次のように計算する:

$$\begin{aligned}
 W_{1,1}(z_0) &= \sum_{a \text{ は分岐点}} \operatorname{Res}_{z=a} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)} W_{0,2}(z, \bar{z}) \\
 &= - \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{\frac{1}{z_0-z} dz_0}{(y(z) - y(\bar{z})) dx(z)} W_{0,2}(z, \bar{z}) \\
 &= \frac{1}{2y(z_0) \frac{dx}{dz}(z_0)} W_{0,2}(z_0, \bar{z}_0).
 \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
 \int_D \int_D W_{0,3}(z, z_1, z_2) &= - \frac{1}{y(z) \frac{dx}{dz}(z)} \frac{dT_0}{dz} - \frac{1}{y(z) \frac{dx}{dz}(z)} W_{0,2}(z, \bar{z}) \\
 &\quad + \frac{1}{y(z) \frac{dx}{dz}(z)} \left\{ -T_0(z)^2 - \left(x' \frac{Q(x(z))}{p_0(x(z))} - \frac{x''}{x'} \right) T_0(z) \right\}
 \end{aligned}$$

もわかる. したがって, (7) が得られる. 同様に, $T(z, \hbar) dz$ が Riccati 方程式を満たすことも示せる.

例 (Weber 方程式)

再び, 次の代数曲線を考える.

$$P(x, y) = y^2 - \left(\frac{x^2}{4} - E \right) = 0. \quad (2)$$

このとき

$$x = x(z) = \sqrt{E} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\int_D = \nu_0 \int_0^z + \nu_\infty \int_\infty^z$$

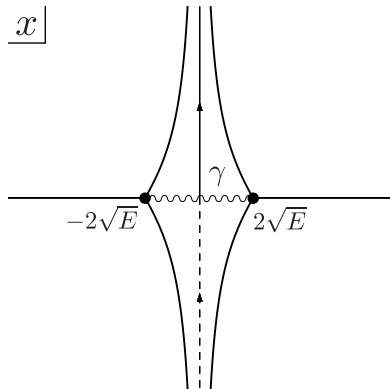
とすると, 定理 1 より (2) に対応する微分方程式は

$$\left[\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left\{ \frac{x^2}{4} - E - \left(\nu_0 - \frac{1}{2} \right) \hbar \right\} \right] \psi(x, \hbar) = 0 \quad (W)$$

となる. 以下では $\nu = \nu_0 (= 1 - \nu_\infty)$ と表記する.

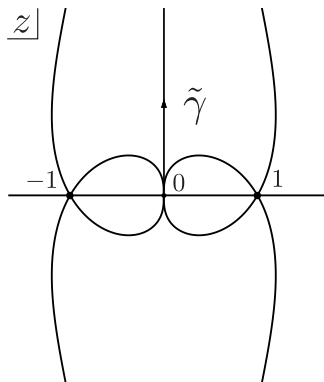
Weber 方程式の Voros 係数の積分路

$$\begin{aligned}
 V(E, \nu, \hbar) &= \int_{\gamma} \{S(x, \hbar) - \hbar^{-1}S_{-1}(x) - S_0(x)\} dx \\
 &= \int_{\tilde{\gamma}} \{T(z, \hbar) - \hbar^{-1}T_{-1}(z) - T_0(z)\} dz
 \end{aligned}$$



$$x = \sqrt{E} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

\longleftrightarrow

Figure: x 平面 (Weber 方程式)Figure: z 平面 (Weber 方程式)

- 1 概要
- 2 完全 WKB 解析と Voros 係数
- 3 位相的漸化式
- 4 WKB 解の位相的漸化式による表示
- 5 Voros 係数の位相的漸化式による表示

定理 2 (Weber 方程式)

$F_g(E)$ を Weber 方程式に対応するスペクトル曲線の自由エネルギーとし,
 $F_g(E)$ の母関数を

$$F(E, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g(E) \hbar^{2g-2}$$

と表す. このとき Weber 方程式の Voros 係数 $V(E, \nu, \hbar)$ は, $F(E, \hbar)$ を用いて次のように表される.

$$\begin{aligned} V(E, \nu, \hbar) &= F(E + \nu\hbar, \hbar) - F(E + (\nu - 1)\hbar, \hbar) \\ &\quad - \frac{\partial F_0}{\partial E} \hbar^{-1} - \frac{2\nu - 1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

定理 2 の証明

$$V(E, \nu, \hbar) = \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{2g+n-2=m} \frac{1}{n!} \frac{d}{dz} \int_D \cdots \int_D W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right\} dz.$$

ここで $\int_D = \nu \int_0^z + (1-\nu) \int_{\infty}^z$ より

$$V(E, \nu, \hbar) = \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \sum_{2g+n-2=m} \frac{\nu^n - (\nu-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} W_{g,n}(z_1, \dots, z_n).$$

$$\frac{\partial^n F_g}{\partial E^n} = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \quad (9)$$

を用いると

$$\begin{aligned} V(E, \nu, \hbar) &= \sum_{m=1}^{\infty} \hbar^m \sum_{2g+n-2=m} \frac{\nu^n - (\nu-1)^n}{n!} \frac{\partial^n F_g}{\partial E^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^n - (\nu-1)^n}{n!} \hbar^n \frac{\partial^n F(E, \hbar)}{\partial E^n} - \frac{\partial F_0}{\partial E} \hbar^{-1} - \frac{2\nu-1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} \end{aligned}$$

定理 2 の証明

変分の公式 (cf. [EO2])

$x(z; \lambda)$, $y(z; \lambda)$ (λ はパラメータ) とする.

$$y(z; \lambda + \epsilon) dx(z; \lambda + \epsilon) = y(z; \lambda) dx(z; \lambda) + \epsilon d\Omega + o(\epsilon^2)$$

$$d\Omega(z) = \int_{z' \in \gamma} B(z, z') \Lambda(z')$$

を満たす積分路 γ と γ の近傍で定義される正則関数 $\Lambda(z')$ が存在するとき, $2g - 2 + n \geq 1$ に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{\partial W_{g,n}}{\partial \lambda} = \int_{z_{n+1} \in \gamma} W_{g,n+1}(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \Lambda(z_{n+1}). \quad (10)$$

この公式を用いると

$$\frac{\partial W_{g,n}}{\partial E} = \int_0^\infty W_{g,n+1}(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \quad (11)$$

となり, $F_g = W_{g,0}$ より (9) が得られる.

$F(E, \nu, \hbar)$ の満たす差分方程式

WKB 解析を用いると $V(E, 0, \hbar) = V(E, 1, \hbar)$ がわかる. このことから, $F(E, \hbar)$ は次の差分方程式を満たす:

$$F(E + \hbar, \hbar) - 2F(E, \hbar) + F(E - \hbar, \hbar) = \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2}. \quad (12)$$

(12) は

$$\left\{ e^{\hbar \frac{\partial}{\partial E}} - 2 + e^{-\hbar \frac{\partial}{\partial E}} \right\} F(E, \hbar) = \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2},$$

$$e^{-\hbar \frac{\partial}{\partial E}} \left(e^{\hbar \frac{\partial}{\partial E}} - 1 \right)^2 F(E, \hbar) = \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2}$$

と書き直すことができる.

$$\frac{w}{e^w - 1} = 1 - \frac{w}{2} + \sum_{g=1}^{\infty} \frac{B_{2g}}{(2g)!} w^{2g},$$

を用いて, この方程式を解くと, 次が得られる.

$$F_g(E) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} E^{2-2g} \quad (g \geq 2).$$

Weber 方程式の Voros 係数の具体形

$F_g(E)$ の具体形

$$F_g(E) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} E^{2-2g} \quad (g \geq 2). \quad (13)$$

定理 2 で得られた

$$\begin{aligned} V(E, \nu, \hbar) &= F(E + \nu\hbar, \hbar) - F(E + (\nu - 1)\hbar, \hbar) \\ &\quad - \frac{\partial F_0}{\partial E} \hbar^{-1} - \frac{2\nu - 1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2} \end{aligned} \quad (8)$$

と (13) より, Voros 係数 $V(E, \nu, \hbar)$ の具体形が得られる:

$V(E, \nu, \hbar)$ の具体形

$$V(E, \nu, \hbar) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n(1-\nu)}{n(n-1)} \left(\frac{\hbar}{E} \right)^{n-1}. \quad (14)$$

ここで, $B_n(X)$ は n 番目の Bernoulli 多項式である.

Kummer 方程式

$$P(x, y) = 4x^2y^2 - (x^2 + 4t_0x + 4t_1^2) = 0 \quad (15)$$

を考える. このときスペクトル曲線 (Σ, x, y) として, $\Sigma = \mathbb{P}^1$,

$$\begin{cases} x = x(z) = \sqrt{t_0^2 - t_1^2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 2t_0 = \frac{\sqrt{t_0^2 - t_1^2} (z - z_+) (z - z_-)}{z} \\ y = y(z) = \frac{z^2 - 1}{2(z - z_+) (z - z_-)} \end{cases} \quad (16)$$

をとる. ここで, $z_+ = \sqrt{t_0 + t_1} / \sqrt{t_0 - t_1}$, $z_- = \sqrt{t_0 - t_1} / \sqrt{t_0 + t_1}$ である. すると定理 1 より, 対応する微分方程式は

$$\left[\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \{ R_0(x) + R_1(x)\hbar + R_2(x)\hbar^2 \} \right] \psi(x, \hbar) = 0, \quad (K)$$

$$R_0(x) = \frac{x^2 + 4t_0x + 4t_1^2}{4x^2}, \quad R_1(x) = \frac{(\nu_0 - \nu_\infty)x + 2(\nu_{z_+} - \nu_{z_-})t_1}{2x^2},$$

$$R_2(x) = \frac{(\nu_{z_+} + \nu_{z_-} + 1)(\nu_{z_+} + \nu_{z_-} - 1)}{4x^2}$$

である.

Voros 係数の積分路 (Kummer 方程式)

$$x = x(z) = \sqrt{t_0^2 - t_1^2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - 2t_0 = \frac{\sqrt{t_0^2 - t_1^2} (z - z_+)(z - z_-)}{z}$$

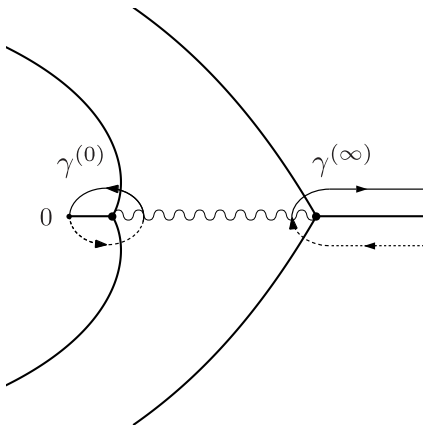


Figure: Kummer 方程式 (x 平面)

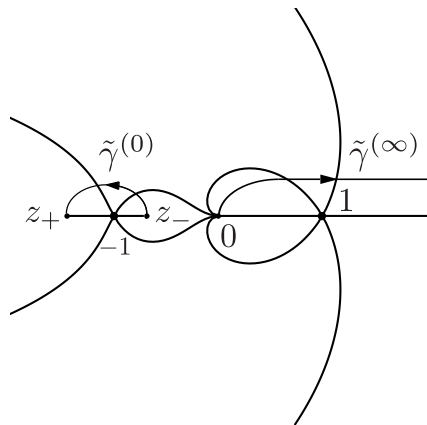


Figure: Kummer 方程式 (z 平面)

定理 3 (Kummer 方程式)

自由エネルギー $F_g(t_0, t_1)$ の母関数を

$$F(t_0, t_1, \hbar) = \sum_{g=0}^{\infty} F_g(t_0, t_1) \hbar^{2g-2}$$

と表す. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} V^{(0)}(t_0, t_1, \nu, \hbar) &= F\left(t_0 + A\hbar, t_1 + \left(B + \frac{1}{2}\right)\hbar, \hbar\right) - F\left(t_0 + A\hbar, t_1 + \left(B - \frac{1}{2}\right)\hbar, \hbar\right) \\ &\quad - \frac{\partial F_0}{\partial t_1} \hbar^{-1} - A \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_0 \partial t_1} - B \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_1^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V^{(\infty)}(t_0, t_1, \nu, \hbar) &= F\left(t_0 + \left(A - \frac{1}{2}\right)\hbar, t_1 + B\hbar, \hbar\right) - F\left(t_0 + \left(A + \frac{1}{2}\right)\hbar, t_1 + B\hbar, \hbar\right) \\ &\quad + \frac{\partial F_0}{\partial t_0} \hbar^{-1} + B \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_0 \partial t_1} + A \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_0^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで $V^{(0)}(t_0, t_1, \nu, \hbar)$ と $V^{(\infty)}(t_0, t_1, \nu, \hbar)$ は Kummer 方程式の Voros 係数であり, また, $A = (\nu_{\infty} - \nu_0)/2$, $B = (\nu_{z-} - \nu_{z+})/2$, $\nu = (\nu_0, \nu_{z+}, \nu_{z-}, \nu_{\infty})$ である.

F_g の具体形 (Kummer 方程式)

Kummer 方程式の場合にも, $F_g(t_0, t_1)$ の具体形が得られる.

F_g の具体形 (Kummer 方程式)

$$F_g(t_0, t_1) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)} \left\{ \frac{1}{(t_0 - t_1)^{2g-2}} + \frac{1}{(t_0 + t_1)^{2g-2}} - \frac{1}{(2t_1)^{2g-2}} \right\} \quad (g \geq 2).$$

ここで, B_{2g} は $2g$ 番目の Bernoulli 数である.

定理 4 (Gauss の超幾何微分方程式)

次の代数曲線を考える.

$$P(x, y) = x^2(1-x)^2y^2 - \{t_0^2x^2 - (t_0^2 + t_1^2 - t_2^2)x + t_1^2\} = 0 \quad (19)$$

このとき対応する方程式は Gauss の超幾何微分方程式となることから、定理 1 よりわかる. $F_g(t_0, t_1, t_2)$ を (19) から得られる自由エネルギーとし、

$$F(t_0, t_1, t_2, \hbar) = \sum_g F_g(t_0, t_1, t_2) \hbar^{2g-2}$$

を $F_g(t_0, t_1, t_2)$ の母関数とする. このとき、次が得られる:

$$\begin{aligned} V^{(0)}(t_0, t_1, t_2, \nu, \hbar) &= F(t_0 + A\hbar, t_1 + (B + \frac{1}{2})\hbar, t_2 + C\hbar, \hbar) \\ &\quad - F(t_0 + A\hbar, t_1 + (B - \frac{1}{2})\hbar, t_2 + C\hbar, \hbar) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial F_0}{\partial t_1} \hbar^{-1} - \frac{A}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_0 \partial t_1} - \frac{B}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_1^2} - \frac{C}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial t_1 \partial t_2}. \end{aligned} \quad (20)$$

ここで $V^{(0)}(t_0, t_1, t_2, \nu, \hbar)$ は Gauss の超幾何微分方程式の Voros 係数であり、 $A = (\nu_5 - \nu_0)/2$, $B = (\nu_3 - \nu_1)/2$, $C = (\nu_4 - \nu_2)/2$, $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$ である. 他の 2 つの Voros 係数も同様の表示が得られる.

参考文献 I

- [AKT] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei : The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 54, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, pp. 19–94.
- [ATT] Aoki, T., Takahashi, T. and Tada, M. : Borel sums of Voros coefficients of Gauss ' hypergeometric differential equations with a large parameter and confluence, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.
- [BE] V. Bouchard and B.Eynard : Reconstructing WKB from topological recursion, arXiv:1606.04498v1 [math-ph].
- [CEO] L. Chekhov, B.Eynard and N. Orantin : Reconstructing WKB from topological recursion, arXiv:1606.04498v1 [math-ph].
- [DM] O. Dumitrescu and M. Mulase : Quantum curves for Hitchin fibrations and the Eynard-Orantin theory, Lett. Math. Phys., **104** (2014), 635–671.

参考文献 II

- [EO1] B. Eynard and N. Orantin : Invariants of algebraic curves and topological expansion, Comm. in Number Theory and Phys., **1** (2007), 347–452.
- [EO2] B. Eynard and N. Orantin : Algebraic methods in random matrices and enumerative geometry, arXiv:0811.3531 [math-ph].
- [HZ] J. Harer and D. Zagier : The Euler characteristic of the moduli space of curves, Invent. Math., **85** (1986), 457–485.
- [Ta] Takahashi, T. : The confluent hypergeometric function and WKB solutions, Docter thesis, 2017.
- [T] Y. Takei : Sato's conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B10** (2008), 205–224.