

第3回古典解析・徳島研究会

～Thomae's connection formula 150～

日時：2019年8月6日（火）

場所：徳島大学常三島キャンパス・建設棟 A207



講演者

山澤 浩司（芝浦工業大）

Gevrey/ q -Gevrey asymptotics for some linear
 q -difference differential equations

大山 陽介（徳島大）

高階 q -超幾何方程式の q -Stokes 現象 –beyond Thomae 150—

1869年に Carl Johannes Thomae (1840-1921)が Heine's basic hypergeometric series の接続公式を導出して150年。そこで、 q -差分方程式をテーマにした研究会を開きます。

Beiträge zur Theorie der durch die Heinesche Reihe:

$$1 + \frac{1-q^a}{1-q} \cdot \frac{1-q^b}{1-q^c} \cdot x + \frac{1-q^a}{1-q} \cdot \frac{1-q^{a+1}}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^b}{1-q^c} \cdot \frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}} \cdot x^2 + \dots$$

darstellbaren Functionen.

(Von Herrn J. Thomae in Halle.)

Es soll hier die von Herrn Heine in die Analysis eingeführte Reihe:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \frac{1-q^a}{1-q} \cdot \frac{1-q^{a+1}}{1-q^2} \dots \frac{1-q^{a+n-1}}{1-q^n} \cdot \frac{1-q^b}{1-q^c} \cdot \frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}} \dots \frac{1-q^{b+n-1}}{1-q^{c+n-1}},$$

J. reine angew. Math. **70** (1869), p.258:

In dem Integral $\int_0^1 f(x) dx$ soll die Function $f(x)$ für alle irrationalen Werthe von x den Werth 0 haben, ebenso für $x=0$ und $x=1$. Für rationale x soll sie den Werth $1:q$ haben, wenn x in kleinster Benennung $p:q$ ist. Dann ist die Anzahl aller Werthe von x , für welche $f(x) \cong 1:Q$ ist, kleiner als $1+2+3+\dots+Q-1$ oder kleiner als Q^2 , wenn Q eine beliebig gross vorgegebene, also $1:Q = \sigma$ eine beliebig kleine Zahl ist. Denn nur für die Zahlenwerthe

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \dots; \frac{1}{Q}, \frac{2}{Q} \dots \frac{Q-1}{Q},$$

also für weniger als $1+2+3+\dots+Q-1$ Werthe ist $f(x) \cong 1:Q$.

Thomae's popcorn function (有理数で不連続だが Riemann 可積分な例)

徳島大学研究クラスター「超対称性から見たラマヌジャンの q -解析とムーンシャインの解明」

問い合わせ先：大山 陽介（徳島大）

Website: <http://math0.pm.tokushima-u.ac.jp/~ohyama/seminar/201908.html>



第3回古典解析・徳島研究会

～Thomae's connection formula 150～

日時：2019年8月6日（火）14：00～16：00
場所：徳島大学常三島キャンパス・建設棟 A207

プログラム

14：00～14：50 大山 陽介（徳島大）

高階 q -超幾何方程式の q -Stokes 現象 –beyond Thomae 150–

15：00～16：00 山澤 浩司（芝浦工業大）

Gevrey/ q -Gevrey asymptotics for some linear q -difference differential equations

アブストラクト

大山 陽介 “高階 q -超幾何方程式の q -Stokes 現象 –beyond Thomae 150–”

1869年にJ. ThomaeがHeineの q -超幾何級数 ${}_2\phi_1(a, b; c; q, z)$ の接続公式を決定してから150年たった。Thomaeは引き続いて ${}_r\phi_{r-1}$ の場合も接続公式を求めている。本講演では ${}_r\phi_{r-1}$ を退化させた級数に対して場合に q -Stokes現象を解析する。

山澤 浩司 “Gevrey/ q -Gevrey asymptotics for some linear q -difference differential equations”

複素領域において線形 q -差分微分方程式について形式べき級数解（以下、型式解）が存在する場合を考察する。適当な条件の下、型式解が次の4つのケースに分類できる。

- 1) 収束する場合（正則解）
- 2) q -Gevrey 評価を持つ場合
- 3) Gevrey 評価を持つ場合
- 4) Gevrey- q -Gevrey 評価を持つ場合

今回の講演では3),4)の場合について形式解を漸近展開として持つ真の解の存在についての結果を紹介する。

